50. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und $q \in [0,1)$, so dass für alle $n \geq 1$ gilt

$$|x_{n+1} - x_n| \leq q|x_n - x_{n-1}|.$$

Beweisen Sie, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist. Stimmt die Folgerung noch, wenn nur gilt $|x_{n+1} - x_n| < |x_n - x_{n-1}|$?

51. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ sei rekursiv definiert durch $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, und

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2} \qquad \text{für } n \geq 2.$$

Zeigen Sie (mit Hilfe von Aufgabe 50), dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Bonus (muss nicht gelöst werden, um das Beispiel anzukreuzen): Können Sie den Grenzwert der Folge bestimmen?

52. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine nach oben beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie: Eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ ist dann und nur dann der Limes superior von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

(i) die Menge $\{\, n \in \mathbb{N} \mid a_n > s - \varepsilon \,\}$ ist unendlich;

(ii) die Menge $\{\, n \in \mathbb{N} \mid a_n > s + \varepsilon \,\}$ ist endlich.

53. Bestimmen Sie Limes superior und Limes inferior der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die definiert ist durch

$$a_n = (1 + (-1)^n)(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

54. Es sei $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ eine irrationale Zahl und es seien $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{N}_+$, so dass gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = a.$$

Beweisen Sie $\lim_{n\to\infty} q_n = \infty$.

Hinweis: Führen Sie einen Beweis durch Widerspruch: Nehmen Sie an, die Folge $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht (uneigentlich) gegen ∞. Überlegen Sie, dass es dann eine beschränkte Teilfolge geben muss, und verwenden Sie den Satz von Bolzano-Weierstraß.