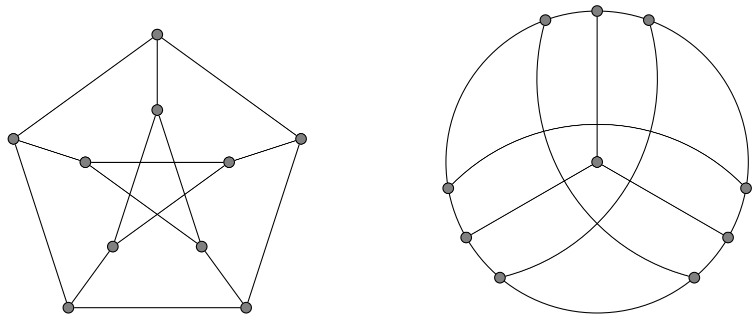
Aufgabe 26. (a) Seien $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ Graphen. Zeigen Sie: Eine bijektive Funktion $f: V \to V'$ ist genau dann ein Isomorphismus von G nach G', wenn für alle $v \in V$ gilt $N(f(v)) = f(N(v))$.

(b) Finden Sie zwei endliche Graphen $G = (V, E)$, $G' = (V', E')$ und eine bijektive Abbildung $f: V \to V'$, so dass für alle $v \in V$ gilt $\deg v = \deg f(v)$, aber f kein Isomorphismus ist.

Aufgabe 27. Geben Sie einen Isomorphimus der folgenden beiden Graphen an.



Bemerkung: Das ist der *Petersen-Graph*. Er ist relativ klein, aber spielt dennoch als Gegenbeispiel zu vielen Vermutungen und als Spezialfall in Sätzen eine wichtige Rolle. Der Petersen Graph ist weiters isomorph zum Graph mit Knotenmenge $\binom{[5]}{2}$, also der ungeordneten Paare der Menge $[5]$, und einer Kante zwischen $\{i, j\}$ und $\{k, l\}$ genau dann wenn $\{i, j\} \cap \{k, l\} = \emptyset$.

Aufgabe 28. Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Ein *Kantenzug (der Länge $n \geq 0$)* ist eine (endliche) Folge $(v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_n, v_n)$ von abwechselnd Knoten und Kanten aus G, mit $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ für $1 \leq i \leq n$. Zeigen Sie: Ist $(v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_n, v_n)$ ein Kantenzug, so gibt es in G einen Weg zwischen v_0 und v_n, dessen Knoten eine Teilmenge von $\{v_0, \ldots, v_n\}$ bilden.